CHAPITRE IV

FONCTIONS DERIVABLES

Dans ce chapitre I et J désigneront toujours deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1) Dérivée d'une fonction :

Définition : *Soient une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

. On dit que f est dérivable au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie. on note cette limite $f'(x_0)$.

. f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Remarques :

i) Soit f une fonction dérivable en x_0. Posons $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$ (pour $x \neq x_0$). Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ .Donc f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,(f'(x_0) + \varepsilon(x)).$$

ii) Si on pose $x = x_0 + h$, alors $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ETUSUP .com

Exemples :

i) $f(x) = \sin x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{2\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \underset{(0)}{\sim} \frac{2\cos x_0 \cdot \frac{h}{2}}{h}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \cos x_0$, $f'(x_0) = \cos x_0$.

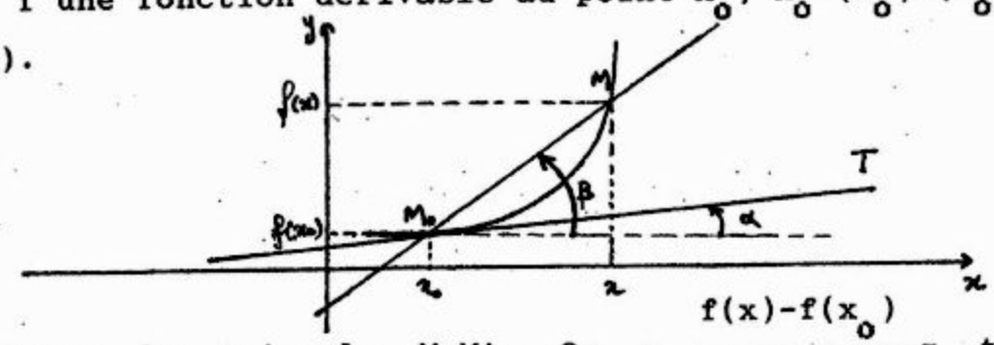
ii) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. En effet:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\ldots+x_0^{n-1})}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} (x^{n-1}+x \,.x_0^{n-2}+\ldots+x_0^{n-1}) = \underbrace{x_0^{n-1}+ x_0^{n-1}+\ldots+ x_0^{n-1}}_{n \text{ fois}} = n\, x_0^{n-1}$$

Interprétation géométrique :

Soient f une fonction dérivable au point x_0, $M_0=(x_0,f(x_0))$ et $M = (x,f(x))$.



considérons le triangle M_0MA. On a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\beta$

Lorsque x tend vers x_0, la droite M_0M tend vers la tangente T à la courbe au point x_0. Donc $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha$ (où α est

ETUSUP .com

l'angle entre T et la droite M_0A).(voir figure).

Autrement dit $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la droite T, tangente à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$.

Définition :*Soient une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

. f est dite dérivable à droite au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie . On note cette limite $f_d'(x_0)$

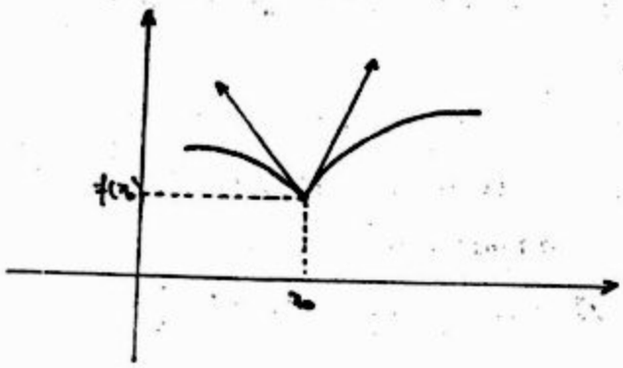
. f est dite dérivable à gauche au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie. On note cette limite $f_g'(x_0)$.

Proposition : *f est dérivable en x_0 si et seulement si $f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$.*

Exemple : $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, car $f_d'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ et $f_g'(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

$f_d'(0) \neq f_g'(x_0)$.

Remarque : si f n'est pas dérivable en x_0 avec $f_g'(x_0) \neq f_d'(x_0)$, alors f admet deux demi tangentes au point $(x_0, f(x_0))$ de pentes $f_g'(x_0)$ et $f_d'(0)$. Par conséquent la courbe de f est auguleuse en ce point .



ETUSUP .com

Exercice: Etudier la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} x^2+e^x & \text{si } x\geq 0 \\ x^4 & \text{si } x<0 \end{cases}$

au point $x_0 = 0$.

Proposition : *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

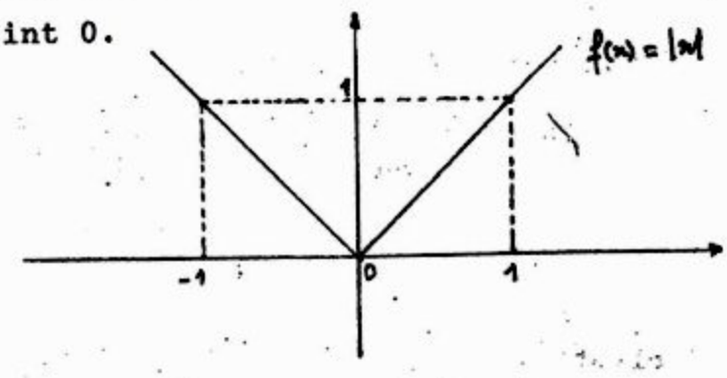
Démonstration : f est dérivable en x_0. Donc :

$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)(f'(x_0)+\varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Par suite

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)(f'(x_0)+\varepsilon(x)) = 0$, c'est-à-dire

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. f est donc continue en x_0.

Remarque : La réciproque de cette proposition n'est pas vraie: $f(x)=|x|$ est continue en 0 , mais elle n'est pas dérivable au point 0.



Remarquer que la courbe de f est anguleuse au point (0,0).

Proposition : *Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in I$. Alors:*

i) $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0)= f'(x_0)+g'(x_0)$.

ii) αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

iii) (fg) est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

ETUSUP .com

iv) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Démonstration :

i) et ii) sont faciles

Pour montrer iii) et iv) il suffit de remarquer que

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0).\ \frac{g(x)-g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et}$$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x - x_0}\right).\ \left(\frac{-1}{g(x)g(x_0)}\right).$$

Proposition : **(Dérivée d'une fonction composée)**

Soient $f: I \longrightarrow J$, $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 et g dérivable au point $X_0 = f(x_0)$. Alors $h=gof$ est dérivable en x_0 et $(gOf)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$.

Démonstration :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(gof)(x)-(gof)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$$ (car ces deux limites existent) $$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(X)-g(X_0)}{X - X_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = g(X_0).f'(x_0) =$$

$= g'(f(x_0)).f'(x_0)$. (On a posé $X = f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} X_0 = f(x_0)$).

ETUSUP .com

Exemple : Etudions la dérivabilité de $h(x)= |\sin x|$ sur $\mathbb{R}$. $h(x)=(g\circ f)(x)$ avec $g(x) = |x|$ et $f(x) = \sin x$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = \sin x_0$ tel que $y_0 \neq 0$, c'est-à-dire $x_0 \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par suite $h = g\circ f$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Soit $f(x) = \sqrt{\cos x}$. Donner le domaine de définition D de f et étudier la dérivabilité de f sur D.

Proposition :*Soient $f: I \longrightarrow J$ une fonction bijective, continue et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. De plus :*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration : Soit $y \in J$. $y = f(x)$ avec $x \in I$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

($y \longrightarrow y_0 \Rightarrow f^{-1}(y) = x \longrightarrow f^{-1}(y_0)= x_0$ car f^{-1} est continue) .

Exemple : $f(x) = \sin x$, $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$.

$$(\text{Arc}\sin x)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-f(x_0)}}$$

car $\cos x_0 \geq 0$ pour $x_0 \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, D'où $(\text{Arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1,1[$

ETUSUP .com

Dérivées d'ordre supérieur :

Si f' est dérivable, on note par f" sa dérivée.

Si f" admet à son tour une dérivée, on la note $f^{(3)}$ et ainsi de suite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence $f^{(n)}$, dérivée d'ordre n de f, de la façon suivante:

$$f^{(n)} = [\ f^{(n-1)}\ ]'$$

avec la convention $f^{(0)} = f$.

Une fonction f est dite indéfiniment dérivable si $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple : $f(x) = \sin x$ est indéfiniment dérivable.
$f^{(n)}(x)=\sin(x + n\frac{\pi}{2})\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ (à vérifier par récurrence). De même $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})\quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Théorème (Formule de Leibniz):

Si f et g admettent des dérivées $n^{ème}$ au point x_0, alors fg admet une dérivée $n^{ème}$ au point x_0 et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, f^{(n-p)} g^{(p)} \quad \text{avec } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemples :

$$(e^x \sin x)^{(3)} = \sum_{p=0}^{3} C_3^p\, (e^x)^{(3-p)} (\sin x)^{(p)}.$$

$$= C_3^0 (e^x)^{(3)} (\sin x)^{(0)} + C_3^1 (e^x)^{(2)} (\sin x)^{(1)} +$$
$$C_3^2 (e^x)^{(1)} (\sin x)^{(2)} + C_3^3 (e^x)^{(0)} (\sin)^{(3)} = e^x \sin x + 3e^x \cos x - 3e^x \sin x - e^x \cos x$$
$$= 2\, e^x (\cos x - \sin x).$$

ETUSUP .com

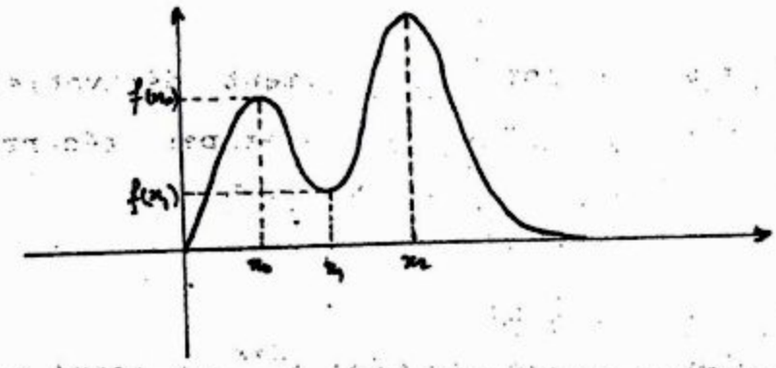
Exercice : Calculer $(x^2 \sin x)^{(n)}$ pour $n \geq 3$
(Remarquer que $(x^2)^{(n)} = 0$ pour $n \geq 3$).

2) **Extremums d'une fonction dérivable** :

Définitions : *Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum relatif (ou local) au point x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$.*

De même f admet un minimum relatif (ou local) au point x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$.

Dans les deux cas, on dit que f admet un extremum relatif en x_0.



L'exemple de la figure correspond à un maximum relatif en x_0 et un minimum relatif en x_1. Au point x_2 on a un maximum absolu.

Proposition : *Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum en ce point, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration :

Supposons que f admet un maximum relatif au point x_0. Alors $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x dans un voisinage de x_0. Par suite

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ et } f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 .$$

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

ETUSUP .com

Remarque : La réciproque de cette proposition n'est pas vraie. Au point $x_0 = 0$ la fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(x_0) = 0$, mais elle n'admet pas d'extremum relatif en ce point .

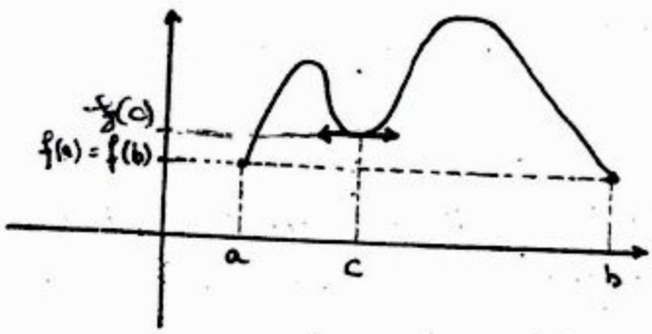
3) **Théorème des accroissements finis** :

On va démontrer d'abord le théorème de Rolle suivant :

Théorème de Rolle :

Soit une fonction $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ vérifiant $f'(c) = 0$.

Graphiquement le théorème de Rolle entraine l'existence d'un point (c, f(c)) où la tangente à la courbe est horizontale (voir figure).



Démonstration : Si f est constante, $f'(c) = 0 \ \forall \ c \in [a,b]$. Supposons que f n'est pas constante. f est continue sur [a,b] donc elle est bornée. Posons $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(c_1)$ et $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(c)$ avec c et c_1 appartiennent à[a,b]. $M \neq f(a)$ ou $m \neq f(a)$. Sinon f seraitconstante.Supposons par exemple $m \neq f(a) = f(b)$. Donc $c \neq a$ et $c \neq b$, c'est-à-dire $c \in]a,b[$.

f admet un minimum relatif en c. La proposition du paragraphe précédente entraine $f'(c) = 0$.

ETUSUP .com

b) Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \leq x_2$. On a :

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)\ (x_2-x_1) \geq 0 \text{ car } f'(c) \geq 0 \text{ et } x_2-x_1 \geq 0$$

<u>Remarque</u> : Si I n'est pas un intervalle , on peut avoir f'=0 sur I sans que f soit constante sur I.

Par exemple $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ sur }]-\infty,0[\\ +2 \text{ sur }]0,+\infty[\end{cases}$ vérifie sur $I=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ la proprité f' = 0.Pourtant elle n'est pas constante.

Terminons ce chapitre par une proposition qui est conséquence du théorème des accroissements finis:

<u>Proposition</u> :<u>(Règle de l'Hôpital)</u>

Si f et g sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *existe, alors* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.

<u>Exemple</u> : Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}$. Ici a = 0, $\frac{1-\cos x^2}{x^4} = \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$ avec $f(x)= 1-\cos x^2$ et $g(x) = x^4$. f et g sont dérivables dans un voisinage de 0 et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\ \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$. La règle de l'hôpital entraine $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..